Relación 1, problema 10: Sea f un polinomio y supongamos que el operador lineal A es raíz de f, es decir, se cumple la ecuación $f(A) = 0$. Probar que si λ es un autovalor cualquiera de A entonces $f(\lambda) = 0$. Si μ es una raíz cualquiera de f, ¿es necesariamente μ un autovalor de A?

Relación 1, problema 11: Calcular los autovalores y autovectores del operador $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Relación 1, problema 12: Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$, y sea $A : V \to V$ el operador derivada definido por

$$A \cdot P = \frac{dP}{dt}, \quad \forall P \in V$$

Hallar los autovalores y autovectores de A.

Relación 1, problema 13: Sea V el espacio vectorial de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y sea $T : V \to V$ el operador lineal definido por

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$$

Probar que T no tiene valores propios.

Relación 1, problema 15: Demostrar que toda matriz tiene los mismos autovalores que su matriz transpuesta. Si A es un endomorfismo invertible, probar que A y A^{-1} tienen los mismos autovectores y hallar la relación existente entre sus autovalores.

Relación 2, problema 1: Determinar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Todo polinomio de grado 1 es el polinomio característico de algún endomorfismo.

b) Un polinomio que solo posee raíces reales ha de ser característico de un endomorfismo real.

c) Si $p_A(\lambda) = \lambda^n - 1$, el endomorfismo es diagonalizable.

d) Si λ_1, λ_2 son autovalores de A, entonces $\lambda_1 + \lambda_2$ es un autovalor de A

e) Si $\lambda \neq 0$ es autovalor de A, entonces A no es nilpotente.

f) Si A es invertible y $\lambda \neq 0$ es autovalor de A, entonces λ^{-1} también es un autovalor de A

g) Si A es invertible y $\lambda \neq 0$ es autovalor de A, entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1}

h) Si λ es un autovalor de A, entonces λ^n es un autovalor de A^n para todo $n \in \mathbb{N}$

i) Toda matriz invertible es diagonalizable.

j) Si A es diagonalizable, entonces A^n es diagonalizable para todo $n \in \mathbb{N}$

k) Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ y AB son diagonalizables.

l) Si A es regular, entonces AB es semejante a BA para cualquier matriz cuadrada B

Relación 2, problema 2: Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$$

Estudiar si es cierta la siguiente afirmación:

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, la matriz A tiene un autovalor con multiplicidad mayor que 1 si y solo si A no es diagonalizable.

Relación 2, problema 3: Sea el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la forma canónica de Jordan, J, de A

b) Calcular una matriz P tal que $P^{-1}AP = J$

c) Calcular la matriz $B = A^5 - 10A^4 + 40A^3 - 80A^2 + 80A + 32I$

Relación 2, problema 5: Sea $E = \mathbb{R}^4[x]$ el espacio lineal real de los polinomios de grado menor o igual que 4 con coeficientes reales. Sea la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : E &\to E \\ p &\mapsto \phi(p) = (x^2 - \lambda^2)p' - 2(2x + \mu)p \end{aligned}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ fijos.

a) Probar que ϕ es una aplicación bien definida y lineal.

b) Calcular la matriz de ϕ en la base canónica de E

c) Calcular, cuando $\lambda = 0$, los autovalores y autovectores de ϕ. ¿Forman estos últimos una base de E?

Relación 2, problema 7: Probar que si una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tiene un solo valor propio λ de multiplicidad algebraica 2, entonces $(A - \lambda I)^2 = 0$

Relación 3, problema 2: Calcular la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 0)$ respecto de una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ definido por $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

Relación 3, problema 6: Se considera el espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar definido por

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_3y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_3$$

a) Calcular una base ortonormal del subespacio $x_2 - 2x_3 = 0$

b) Calcular la distancia del vector $(0, -1, -2)$ al subespacio anterior.

c) Estudiar si el operador dado por la siguiente expresión es simétrico:

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_2 + x_3$$

Relación 3, problema 7, e): Demostrar el teorema del Coseno de la trigonometría clásica y, como caso particular, el teorema de Pitágoras.

Relación 1 – Problema 10

Si λ es un autovalor del operador lineal $\mathbf{A}$, entonces este admite, en cierta base, la escritura matricial por bloques:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_1} \end{pmatrix}$$

Sea f el polinomio:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Evaluemos $f(\mathbf{A})$:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{n} b_k \mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_1} \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \begin{pmatrix} \lambda^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_1}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{k=0}^{n} b_k \mathbf{A_1^k} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{k=0}^{n} b_k \mathbf{A_1^k} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k = 0 \Longrightarrow f(\lambda) = 0$$

¿Es el recíproco cierto? Pues no. Para poner de manifiesto que este enunciado es falso, basta con encontrar un caso que no lo verifique. Una situación fácil de imaginar es la siguiente:

Sea $\mathbf{A}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un operador lineal y f un polinomio de grado $m > n$ en $\mathbb{C}$ cuyas raíces son todas simples. El operador $\mathbf{A}$ tendrá, a lo sumo, n autovalores distintos. Por otra parte, por ser f de grado mayor que n, existirá, al menos, una raíz de f que no será autovalor de $\mathbf{A}$, ya que $\mathbb{C}$ es cuerpo de ruptura de f y el polinomio presentará m raíces distintas (teorema fundamental del Álgebra).

Relación 1 – Problema 11

Empecemos por determinar el polinomio característico, que vendrá dado por:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Denotando por $\mathbf{F}_i$ a la fila i-ésima y por $\mathbf{C}_i$ a la columna i-ésima, efectuamos las siguientes transformaciones, *una a una* (e.g. primero $\mathbf{F}_1 \longrightarrow \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$, a continuación $\mathbf{F}_2 \longrightarrow \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_3$ y así sucesivamente):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\mathbf{C}_i \longrightarrow \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i+1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 1 \\ \lambda & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 1 \\ \lambda & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\mathbf{F}_{i+1} \longrightarrow \mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(n-\lambda)$$

De esta forma, el único autovalor distinto de cero es n.

Busquemos los autovectores asociados a este valor característico. Estos serán aquellos $\mathbf{x}$ que cumplen que:

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Esto equivale al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1-n)x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_1 + (1-n)x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + (1-n)x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

En el que se ha suprimido la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + (1-n)x_n = 0$ ya que el rango de la matriz de coeficientes es $n-1$.

En virtud del teorema de Rouché-Fröbenius, el anterior sistema es compatible indeterminado al ser el número de incógnitas mayor que el rango de la matriz de coeficientes. En particular, habremos de introducir un parámetro para expresar el conjunto de soluciones. Tomaremos como parámetro $x_n = -\mu$, de forma que el sistema queda:

$$\begin{cases} (1-n)x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \mu \\ x_1 + (1-n)x_2 + \cdots + x_{n-1} = \mu \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + (1-n)x_{n-1} = \mu \end{cases}$$

Recurrimos a la regla de Cramer para resolver este sistema. Esto obliga a resolver los determinantes de orden $n-1$:

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mu & 1 & \cdots & 1 \\ \mu & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & \mu \\ 1 & 1-n & \cdots & \mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \mu \end{vmatrix}$$

El primero se calcula de forma inmediata mediante el resultado del determinante que conducía al polinomio característico, remplazando n por $n-1$ y λ por n:

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix} = (-1)^{n-2}n^{n-2}(n-1-n) = (-1)^{n-1}n^{n-2}$$

Para el segundo, aplicamos la cadena de transformaciones:

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 & \cdots & 1 \\ \mu & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix} = (\mathbf{C}_i \longrightarrow \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i+1}) = \mu \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ n & -n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$$

Seguidamente, permuto la columna $\mathbf{C}_i$ con la $\mathbf{C}_{i-1}$ en orden decreciente de i, esto es, la $\mathbf{C}_{n-1}$ con la $\mathbf{C}_{n-2}$, la $\mathbf{C}_{n-2}$ con la $\mathbf{C}_{n-3}$, etc. Esto modifica el signo del determinante, que dependerá del número de permutaciones efectuadas:

$$\mu\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ n & -n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-n \end{vmatrix} = (-1)^{n-2}\mu\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Hacemos una última transformación: $\mathbf{F}_{i+1} \longrightarrow \mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i$ en orden decreciente de i, i.e. de abajo a arriba, y nos queda el determinante de una matriz triangular que da:

$$(-1)^{n-2}\mu\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-2}\mu n^{n-2}$$

El resto de determinantes que resultan de cambiar cada columna de la matriz de coeficientes por los términos independientes también vale $(-1)^{n-2}\mu n^{n-2}$, pues de estos determinantes se llega al que acabamos de desarrollar sin más que intercambiar una fila y una columna, lo que deja el signo invariante.

Al aplicar la regla de Cramer a la coordenada i-ésima de $\mathbf{x}$, se tiene que:

$$x_i = \frac{(-1)^{n-2}\mu n^{n-2}}{(-1)^{n-1}n^{n-2}} = -\mu$$

Concluimos que los autovectores son aquellos cuyas componentes son todas iguales.

Relación 1 – Problema 12

Sea P un polinomio en t genérico:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$$

La aplicación del operador derivada a este polinomio da:

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{k=1}^{n} k b_k t^{k-1}$$

Se comprueba sin ninguna dificultad que la derivada es un operador lineal. En efecto:

$$\frac{d(P+Q)}{dt} = \frac{dP}{dt} + \frac{dQ}{dt} \qquad \wedge \qquad \frac{d(\zeta P)}{dt} = \zeta\frac{dP}{dt}$$

Con P y Q polinomios y ζ escalar.

El procedimiento más *mecánico* para encontrar los autovalores y autovectores del operador consiste en extraerlos de la matriz de la aplicación. Tomamos la base:

$$B = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

Determinamos las imágenes de estos vectores bajo la aplicación derivada:

$$\frac{d}{dt}(B) = \{0, 1, 2t, \dots, nt^{n-1}\}$$

Por tanto, la matriz de la aplicación queda:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos el polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n$$

De esta forma, el único autovalor es el cero. Ya es fácil intuir cuáles son los autovectores, que son solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde resulta $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$. Los autovectores son las constantes, ya que su derivada es nula.

Como ya se ha indicado, este es el modo más *formal* de resolver el problema, pero se podría dar una respuesta igual de válida utilizando las propiedades de la derivada de un polinomio y sin necesidad de recurrir al Álgebra Lineal.

Relación 1 – Problema 13

El problema nos plantea una situación en apariencia análoga al anterior, con la salvedad de que ahora hemos de estudiar el operador lineal 'integral definida' en lugar de la aplicación derivada. La dificultad del ejercicio radica en que tenemos que trabajar con el espacio de todas las funciones reales de variable real continuas. Si el espacio vectorial fuese el de los polinomios, bastaría con encontrar la matriz de la aplicación en cierta base y emplear las técnicas usuales para encontrar autovalores y autovectores. No obstante, la integral definida de una función depende de la forma de esta, incluso hay funciones que carecen de primitiva (lo que no significa que no sean integrables), así que resultaría imposible escribir la matriz de esta aplicación. El espacio de funciones continuas es de dimensión infinita, y esta clase de espacios requiere herramientas muy distintas de las utilizadas para el estudio de espacios de dimensión finita. No nos queda otra que recurrir a argumentos propios del Análisis Matemático.

Nos proponemos encontrar autovalores y autovectores del operador T, es decir, escalares λ y vectores f que satisfagan la relación:

$$(Tf)(t) = \lambda f$$

O bien:

$$\int_0^t f(s)\ \mathrm{d}s = \lambda f(t)$$

En virtud del teorema fundamental del Cálculo, podemos escribir:

$$F(t) - F(0) = \lambda f(t)$$

Donde F es una primitiva de f, lo que quiere decir que $dF/dt = f(t)$. Aprovechando esto, de la identidad anterior se deduce la ecuación diferencial:

$$F(t) - F(0) = \lambda \frac{dF}{dt}$$

Cuya solución es del tipo:

$$F(t) = Ce^{t/\lambda} + F(0) \qquad\qquad C \in \mathbb{R}$$

¿Cuánto vale $F(0)$?

$$F(0) = C + F(0)$$

Lo cual es una contradicción, salvo en el caso $C = 0$. Sin embargo, de ser esto verdad, se tendría $F(t) = F(0) = \text{cte}$ y $f(t) = dF/dt = 0$. Hemos probado, por reducción al absurdo, que el operador T carece de autovalores.

Relación 1 – Problema 15

Dada una matriz $\mathbf{A}$, los autovalores son las soluciones de la ecuación:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Los autovalores de $\mathbf{A}^t$, de la misma forma, verifican la ecuación:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}^t - \mu\mathbf{I}) = 0$$

Tenemos que demostrar que las expresiones $\mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ y $\mathrm{Det}(\mathbf{A}^t - \mu\mathbf{I})$ son equivalentes. Para ello, basta ver que:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}^t - \mu\mathbf{I}) =^{(1)} \mathrm{Det}[\mathbf{A}^t - (\mu\mathbf{I})^t] =^{(2)} \mathrm{Det}[(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^t] =^{(3)} \mathrm{Det}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})$$

(1) La matriz $\mu\mathbf{I}$ es simétrica. Por tanto, $\mu\mathbf{I} = (\mu\mathbf{I})^t$

(2) La suma de matrices transpuestas coincide con la transpuesta de la suma.

(3) El determinante de una matriz es el mismo que el de su transpuesta.

En consecuencia, $\mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathrm{Det}(\mathbf{A}^t - \mu\mathbf{I}) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})$. Las dos ecuaciones son equivalentes y sus soluciones, iguales.

En lo referente a la relación entre los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{-1}$, parece más conveniente trabajar con la interpretación de $\mathbf{A}$ como aplicación lineal, que denotaremos $f_{\mathbf{A}}$, en lugar de como matriz, ya que la inversión, a diferencia de la transposición, no se comporta bien con la suma.

Sea $\mathbf{x}$ un autovector de $f_{\mathbf{A}}$:

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

El que $f_{\mathbf{A}}$ sea un endomorfismo invertible (automorfismo) supone que ${f_{\mathbf{A}}}^{-1}(\lambda \mathbf{x})$ existe. Su valor ha de ser:

$${f_{\mathbf{A}}}^{-1}(\lambda \mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

Aprovechando ahora la *linealidad* de ${f_{\mathbf{A}}}^{-1}$, se tendrá:

$${f_{\mathbf{A}}}^{-1}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda {f_{\mathbf{A}}}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Longrightarrow {f_{\mathbf{A}}}^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$$

En definitiva, los autovectores de un endomorfismo son los mismos que los de su inversa. La relación entre los autovalores es la que cabría esperar: los de $\mathbf{A}^{-1}$ son los inversos de los autovalores de $\mathbf{A}$.

Relación 2 – Problema 1

a) Sea $\mathbf{A}$ un endomorfismo, su polinomio característico viene dado por:

$$p(\lambda) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

De la definición se desprende inmediatamente que el grado del polinomio característico es igual al orden de la matriz cuadrada del endomorfismo $\mathbf{A}$. Así, los polinomios de grado 1 se corresponden con matrices de orden 1.

Un polinomio de grado 1 en λ es cualquier expresión algebraica de la forma $a\lambda + b$. Sin embargo, si la matriz del endomorfismo es ξ (un escalar), el polinomio característico es necesariamente del tipo $\xi - \lambda$, es decir, la a en $a\lambda + b$ vale forzosamente -1. La expresión $3\lambda + 1$ no puede ser el polinomio característico de ningún endomorfismo. La afirmación es falsa.

b) Falso. Por ejemplo:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, que solo presenta raíces reales.

c) En $\mathbb{C}$, el polinomio $\lambda^n - 1$ tiene exactamente n ceros que no son sino las raíces enésimas de la unidad, todas ellas distintas entre sí. Esto asegura que el endomorfismo sea diagonalizable, pues, dado que la multiplicidad algebraica de cada autovalor es 1, también será esta la dimensión geométrica de los mismos. En total, dispondremos de n autovectores independientes con los que podremos construir una base del espacio vectorial en cuestión, cuya dimensión es la misma que el grado del polinomio característico, esto es, n (como ya se mencionó en el primer apartado). En estas circunstancias, la afirmación es verdadera. No se podría decir lo mismo si el cuerpo considerado es $\mathbb{R}$.

d) Salta a la legua que el enunciado carece de sentido. Imaginemos por un instante que es cierto. Consideremos un endomorfismo del que conocemos dos autovalores, λ_1 y λ_2. Un tercer autovalor vendría dado por $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$. ¿Pero qué me impide afirmar que $\lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_3$ es otro valor propio? Desde luego, no contradice el postulado este. Podría continuar sacándome autovalores de la manga: $\lambda_5 = \lambda_1 + \lambda_4$, $\lambda_6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ y así *ad infinitum*. Lo mismo sería posible decir de las raíces del polinomio característico, cuyo número dejaría de ser finito.

e) Una matriz (o endomorfismo) nilpotente es el que cumple $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ para cierto n natural (y cualquier valor mayor que este, evidentemente).

Partamos del supuesto de que $\mathbf{A}$ posee un autovalor $\lambda \neq 0$, es decir:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

Para ciertos $\mathbf{x}$.

Entonces, se cumplirá que:

$$\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \lambda \mathbf{x} = \lambda^2 \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A^2} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \lambda^2 \mathbf{x} = \lambda^3 \mathbf{x}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \lambda^{n-1} \mathbf{x} = \lambda^n \mathbf{x}$$

Es decir, $\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, lo que imposibilita que $\mathbf{A}$ sea nilpotente. La afirmación es correcta.

f) Enunciado similar al **d)** e igualmente erróneo. Verbigracia, la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Posee los autovalores 2 y 3, pero sus inversos, $1/2$ y $1/3$, no son valores propios.

g) Verdadero (ver problema 15 de la relación 1).

h) Sea $\mathbf{D}$ matriz diagonalizable. En la base apropiada, la matriz se escribe:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Donde los λ_i no tienen por qué ser distintos dos a dos.

Su potencia n-ésima es, por tanto:

$$\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

De modo que los λ_i^n son valores propios de $\mathbf{D}^n$. La afirmación es bondadosa. Otro posible razonamiento es el que se desprende del argumento esgrimido en el apartado **d)**.

i) Falso. La siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Es invertible (ya que $\mathrm{Det}\mathbf{A} \neq 0$) pero no es diagonalizable (véase problema 3, relación 2).

j) Verdadero, como se comprueba en el apartado **h)**.

k) No necesariamente. La afirmación solo es correcta si las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ consideradas tienen los mismos autovectores.

l) Que $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BA}$ sean semejantes significa que existe una matriz $\mathbf{P}$ regular tal que:

$$\mathbf{PABP}^{-1} = \mathbf{BA}$$

La matriz $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$, que existe por ser $\mathbf{A}$ regular, verifica la anterior igualdad.

Relación 2 – Problema 2

Nótese que se pide probar un 'si y solo si', es decir, tenemos que demostrar la implicación en ambos sentidos.

Que si $\mathbf{A}$ no es diagonalizable, el endomorfismo presenta un autovalor con multiplicidad mayor que uno es trivial. En efecto, toda matriz cuyo polinomio característico solo presenta raíces simples (en $\mathbb{C}$) es automáticamente diagonalizable, de donde se sigue que si un endomorfismo no es diagonalizable, ha de poseer, al menos, un autovalor con multiplicidad doble o superior.

Por otra parte, supongamos que hemos hallado un valor propio λ de multiplicidad distinta de 1. Para que la matriz $\mathbf{A}$ sea diagonalizable, las dimensiones algebraica y geométrica del autovalor deben coincidir.

Ahora bien, la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a \\ 1 & -\lambda & 0 & b \\ 0 & 1 & -\lambda & c \\ 0 & 0 & 1 & d-\lambda \end{pmatrix}$$

Tiene rango 3, ya que:

$$|1| \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Así, la dimensión geométrica de λ no puede ser mayor que 1. La matriz no es diagonalizable.

Relación 2 – Problema 3

a) Empecemos buscando los autovalores de $\mathbf{A}$, como ya es costumbre. Esto requiere calcular el determinante $\mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, que siempre es conveniente simplificar a través de las transformaciones adecuadas. Un posible camino es el que sigue:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\mathbf{F}_2 \longrightarrow \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\mathbf{F}_4 \longrightarrow \mathbf{F}_4 - 2\mathbf{F}_2) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4$$

Vemos que el único valor propio de $\mathbf{A}$ es 2, con dimensión algebraica 4.

Estudiemos la matriz $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que el rango de esta matriz es 2. Por tanto, la dimensión del núcleo del endomorfismo $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ es también 2 (en virtud de $\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$). Podemos, pues, obtener dos autovectores linealmente independientes para este autovalor, los cuales no son suficientes para construir una base del espacio vectorial en el que nos encontramos (ya que la dimensión de este es 4). Tenemos que buscar dos 'autovectores generalizados' que completen la base. La matriz $\mathbf{A}$ expresada en esta base es la llamada forma canónica de Jordan, que constará de dos bloques de Jordan y, por ende, será:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) El cálculo de la matriz $\mathbf{P}$ se efectúa determinando la base en la que la matriz $\mathbf{A}$ coincide con $\mathbf{J}$. Observamos que $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2$ es la matriz nula. Por tanto, cualquiera de las columnas de $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ está en su propio núcleo y es autovector de $\mathbf{A}$. Tomaremos:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Queda encontrar vectores $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_4$ tales que $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$ y $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_3$. Se deduce fácilmente que:

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¡Téngase en cuenta que la ordenación de los elementos de la base no es arbitraria!

La matriz $\mathbf{P}$ no deja de ser una matriz de cambio de base entre la usual y la que acabamos de construir:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Se trata de aprovechar la simplicidad de la forma canónica de Jordan para hallar las potencias de $\mathbf{A}$ en la base de autovectores generalizados y luego emplear la matriz de paso para escribir el resultado en la base canónica.

Dado que:

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_2^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2^n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}_2^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$$

$$\mathbf{J}_2^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}_2^3 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}_2^4 = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}_2^5 = \begin{pmatrix} 32 & 80 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$$

Resulta:

$$\mathbf{J}^5 - 10\mathbf{J}^4 + 40\mathbf{J}^3 - 80\mathbf{J}^2 + 80\mathbf{J}\ + 32\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 64 & 112 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 112 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

Falta hacer el cambio de base:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}(\mathbf{J}^5 - 10\mathbf{J}^4 + 40\mathbf{J}^3 - 80\mathbf{J}^2 + 80\mathbf{J}\ + 32\mathbf{I})\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -48 & -112 & 0 & -112 \\ 112 & -48 & -224 & 112 \\ -112 & 112 & 288 & -112 \\ 0 & 224 & 224 & 64 \end{pmatrix}$$

Relación 2 – Problema 5

a) Verificar que una aplicación está bien definida consiste en comprobar que satisface la propia definición de aplicación. Así, notamos que $\exists \phi(p)\ \forall p \in E$ y que $p = q \Longrightarrow \phi(p) = \phi(q)$ (esto es así porque la relación de equivalencia definida en el espacio de polinomios es tal que las clases de equivalencia tienen un único elemento. Normalmente, la definición de una aplicación puede dar problemas en conjuntos del estilo de los 'enteros módulo n', donde las clases de equivalencia constan de más de un elemento). Finalmente, la imagen de cualquier elemento de E está contenida en E. Es cierto que al obtener la imagen de un polinomio de cuarto grado aparecen dos monomios de quinto grado, pero estos se cancelan en todo caso.

La linealidad de ϕ está asegurada porque la derivada es lineal y E es un espacio vectorial (i.e. se cumplen las propiedades distributivas, etc.).

b) La base canónica de E es $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Calculamos las imágenes de los elementos de la base:

$$\phi(1) = -4x - \mu$$

$$\phi(x) = x^2 - \lambda^2 - 4x^2 - \mu x = -3x^2 - \mu x - \lambda^2$$

$$\phi(x^2) = 2x^3 - 2\lambda^2 x - 4x^3 - \mu x^2 = -2x^3 - \mu x^2 - 2\lambda^2 x$$

$$\phi(x^3) = 3x^4 - 3\lambda^2 x^2 - 4x^4 - \mu x^3 = -x^4 - \mu x^3 - 3\lambda^2 x^2$$

$$\phi(x^4) = 4x^5 - 4\lambda^2 x^3 - 4x^5 - \mu x^4 = -\mu x^4 - 4\lambda^2 x^3$$

De forma que la matriz de la aplicación es:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} -\mu & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -\mu & -2\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\mu & -3\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\mu & -4\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\mu \end{pmatrix}$$

c) Se pide determinar los autovalores y autovectores de la matriz:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\mu \end{pmatrix}$$

Al tratarse de una matriz triangular, $\mathrm{Det}(\mathbf{\Phi}-\rho\mathbf{I})=-(\mu+\rho)^5$. El único valor propio es $-\mu$ y su dimensión algebraica, 5.

La matriz:

$$\mathbf{\Phi}+\mu\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\-4&0&0&0&0\\0&-3&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

tiene rango 4. La dimensión del subespacio vectorial asociado a este valor propio es 1 y el autovector que lo genera no forma una base de E. Calculemos este autovector:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\-4&0&0&0&0\\0&-3&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

De donde se obtiene $x_1=\cdots=x_4=0$. Los autovectores son los monomios de cuarto grado.

Relación 2 – Problema 7

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden 2 arbitraria:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

Busquemos su polinomio característico:

$$\begin{vmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{vmatrix}=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$$

Que $\mathbf{A}$ tiene un autovalor de multiplicidad 2 significa que este polinomio de segundo grado presenta una única raíz. Entonces, el discriminante de la ecuación de segundo grado correspondiente vale cero:

$$\Delta=(a+d)^2-4(ad-bc)=a^2+d^2-2ad+4bc=0$$

Además, el valor propio se puede calcular:

$$\lambda=\frac{a+d\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{a+d}{2}$$

A la luz de estos resultados, desarrollemos $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2$:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2=\begin{pmatrix}(a-\lambda)^2+bc&b(a-\lambda)+b(d-\lambda)\\c(a-\lambda)+c(d-\lambda)&bc+(d-\lambda)^2\end{pmatrix}$$

Todas las entradas de esta matriz son nulas:

$$(a-\lambda)^2+bc=a^2+\lambda^2-2a\lambda+bc=a^2+\frac{a^2+d^2+2ad}{4}-a^2-ad+bc=\frac{a^2+d^2-2ad+4bc}{4}=0$$

$$b(a-\lambda)+b(d-\lambda)=b(a+d-2\lambda)=b[a+d-(a+d)]=0$$

$$c(a-\lambda)+c(d-\lambda)=c[a+d-(a+d)]=0$$

$$bc+(d-\lambda)^2=bc+d^2+\frac{a^2+d^2+2ad}{4}-ad-d^2=\frac{a^2+d^2-2ad+4bc}{4}=0$$

Queda demostrado que $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2=\mathbf{0}$.

Relación 3 – Problema 2

En primer lugar, hallamos una base ortogonal de W, subespacio vectorial de dimensión 2. W viene definido a partir de la ecuación implícita:

$$x_1+x_2+x_3=0$$

Un vector que verifica esta ecuación es el $\mathbf{e}_1=(-1,1,0)$. Necesitamos un segundo vector que sea ortogonal a este primero y que esté contenido en el subespacio. Sea $\mathbf{e}_2=(a,b,c)$:

$$\begin{cases}\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle=-a+b=0\Longrightarrow a=b\\ a+b+c=0\Longrightarrow c=-(a+b)\end{cases}\Longrightarrow c=-2a$$

Tomamos $\mathbf{e}_2=(1,1,-2)$.

Construida la base de W, encontramos un vector ortogonal a los dos anteriores, esto es, un vector ortogonal al subespacio W. $\mathbf{e}_3=(1,1,1)$ cumple este requisito, pues, siendo $\mathbf{w}\in W$:

$$\mathbf{w}=(x_1,x_2,x_3)\qquad\qquad\langle\mathbf{w},\mathbf{e}_3\rangle=x_1+x_2+x_3=0$$

Normalizamos la base de $\mathbb{R}^3$, i.e. dividimos cada vector entre su módulo. Queda:

$$B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$$

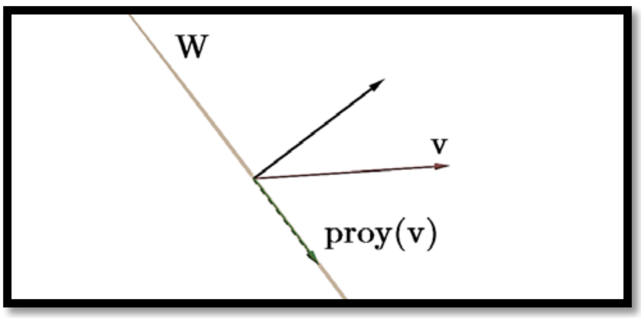
El vector $\mathbf{v}=(1,1,0)$ se escribe en esta base:

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{3}\langle\mathbf{v},\mathbf{e}_i\rangle\,\mathbf{e}_i=\frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{e}_2+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_3$$

Hemos descompuesto $\mathbf{v}$ en suma de un vector que está contenido en W y otro que se halla en su complementario (y que es ortogonal a W). De esta forma, la proyección de $\mathbf{v}$ sobre W, que podríamos denotar $\mathrm{proy}_W(\mathbf{v})$, resulta ser el primero de estos dos vectores.

Matemáticamente:

$$\mathrm{proy}_W(\mathbf{v})=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$



Relación 3 – Problema 6

a) El producto escalar que definen en el enunciado no es el usual. Conviene encontrar una base cualquiera del subespacio W y luego aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. A la vista de la ecuación implícita:

$$W \equiv x_2 - 2x_3 = 0$$

Una base de W es $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(1,0,0),(0,2,1)\}$. Antes de ortogonalizar, completo este sistema de vectores hasta obtener una base del espacio vectorial completo:

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \{(1,0,0),(0,2,1),(0,0,1)\}$$

Además, obtengo la matriz del producto escalar (*matriz de Gram*) en la base canónica:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} ((1,0,0),(1,0,0)) & ((1,0,0),(0,1,0)) & ((1,0,0),(0,0,1)) \\ ((0,1,0),(1,0,0)) & ((0,1,0),(0,1,0)) & ((0,1,0),(0,0,1)) \\ ((0,0,1),(1,0,0)) & ((0,0,1),(0,1,0)) & ((0,0,1),(0,0,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Empleo Gram-Schmidt para construir una base ortogonal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - x\mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{u}_2 - x\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1) - x\|\mathbf{e}_1\|^2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1)}{\|\mathbf{e}_1\|^2}$$

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1) = (0 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad \|\mathbf{e}_1\|^2 = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$x = 2 \Longrightarrow \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_3 - y\mathbf{e}_2 - z\mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = 0 \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{u}_3 - y\mathbf{e}_2 - z\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{u}_3, \mathbf{e}_2) - y\|\mathbf{e}_2\|^2 \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{u}_3 - y\mathbf{e}_2 - z\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{u}_3, \mathbf{e}_1) - z\|\mathbf{e}_1\|^2 \end{cases}$$

$$(\mathbf{u}_3, \mathbf{e}_2) = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \qquad \|\mathbf{e}_2\|^2 = (-2 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$$

$$(\mathbf{u}_3, \mathbf{e}_1) = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} y = 2/5 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que puedo remplazar cualquiera de estos vectores por otros que conserven su dirección, la base ortogonalizada es:

$$B = \{(1,0,0),(-2,2,1),(-4,4,3)\}$$

Normalizo este conjunto de vectores:

$$\|\mathbf{e}_3\|^2 = (-4 \quad 4 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$$

$$B_n = \left\{(1,0,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,2,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(-4,4,3)\right\}$$

La base pedida, la del subespacio W, es la constituida por los dos primeros vectores.

En una base ortonormal, todo producto escalar se reduce al usual. Como comprobación, calculo la matriz de Gram en esta nueva base. La relación entre dos matrices de Gram escritas en distintas bases es de *congruencia*:

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{P}^t\mathbf{G}\mathbf{P} \qquad\qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2/\sqrt{10} & -4/\sqrt{10} \\ 0 & 2/\sqrt{10} & 4/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Se comprueba que $\mathbf{G}_n = \mathbf{I}$. A partir de ahora, escribiremos todos los vectores en la base ortonormal y así evitaremos el producto escalar tan engorroso que se define en el enunciado.

b) La distancia entre un vector y un subespacio se define como la distancia entre ese vector y su proyección sobre el subespacio:

$$d(\mathbf{v}, W) = d\big(\mathbf{v}, \mathrm{proy}_W(\mathbf{v})\big) = \|\mathbf{v} - \mathrm{proy}_W(\mathbf{v})\|$$

El vector $\mathbf{v} = (0, -1, -2)$ presenta, en la base ortonormal obtenida, la escritura:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{v}, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3$$

La proyección de $\mathbf{v}$ sobre W, por otra parte, es:

$$\mathrm{proy}_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$

Se sigue que:

$$\mathbf{v} - \mathrm{proy}_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \Longrightarrow d(\mathbf{v}, W) = \|(\mathbf{v}, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3\|$$

Antes de operar, encuentro la expresión de $\mathbf{v}$ en la base B_n. Hago uso de la matriz $\mathbf{P}$, que verifica:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{v}'$$

Donde $\mathbf{v}'$ es el vector en función de los elementos de B_n, que es lo que me interesa hallar. Despejando:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}$$

Se tiene:

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 15/\sqrt{10} & -20/\sqrt{10} \\ 0 & -5/\sqrt{10} & 10/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 25/\sqrt{10} \\ -15/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

De esta forma:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{25}{\sqrt{10}} & -\frac{15}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{15}{\sqrt{10}}$$

$$d(\mathbf{v}, W) = \|(\mathbf{v}, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3\| = \frac{15}{\sqrt{10}}\|\mathbf{e}_3\| = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

c) Un operador se dice simétrico si su matriz en una base ortonormal es simétrica. Calculo las imágenes de los elementos de B_n (denotaremos f a la aplicación):

$$f\big((1,0,0)\big) = (1,0,0)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,2,1)\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,3)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-4,4,3)\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-4,3,7)$$

La matriz de la aplicación es, por consiguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/\sqrt{10} & -4/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 7/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

Cuya simetría brilla por su ausencia.

Relación 3 – Problema 7, apartado e

Se trata de demostrar el teorema del coseno, que viene siendo una generalización del teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos.

Un enunciado del teorema es el siguiente:

Dado un triángulo de lados a, b y c, se verifica:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Siendo θ el ángulo comprendido entre los lados a y b

Este resultado matemático admite demostraciones variopintas. El Álgebra Lineal proporciona una muy sencilla y general (independiente del número de dimensiones, de la definición del producto escalar, etc.).

En cualquier espacio euclídeo, un triángulo queda determinado por dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. El tercer lado del triángulo es simplemente la diferencia de estos dos vectores, $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ (no importa en qué orden se resten, ya que esto solo afecta al sentido del vector).

Definidos los lados del triángulo de esta forma, la prueba del teorema del coseno es incluso intuitiva. Por una parte:

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = \|\mathbf{c}\|^2$$

Por otra:

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

Así, el teorema del coseno es una consecuencia natural de la bilinealidad del producto escalar euclídeo y de la definición de ángulo entre dos vectores en función de este.

Examen junio 2014 – Problema 1

En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ *con el producto escalar usual se considera el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) *Comprobar que* $\mathbf{A}$ *es una isometría.*

b) *Hallar los autovalores de* $\mathbf{A}$ *y los subespacios invariantes.*

a) *Clasificar geométricamente la isometría.*

a) Por *isometría* entendemos aquel endomorfismo que conserva los productos escalares, i.e. f es una isometría si y solo si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle$ para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ elementos del espacio vectorial. Una isometría mantiene invariantes, por tanto, las normas, la ortogonalidad, etc.

La matriz de una aplicación se corresponde con una isometría si y solo si esta es una matriz ortogonal, esto es, aquella que cumple:

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^t = \mathbf{I}$$

Como se tiene que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ representa una isometría.

b) Como $\mathbf{A}$ es una isometría, los únicos autovalores que admite son ± 1 (¡de lo contrario, no conservaría las normas!). Aprovechando esto, nos podemos ahorrar el cálculo del determinante $\mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ y considerar directamente los casos $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$.

Para $\lambda = 1$, tenemos:

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

Dado que $\mathrm{Det}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$, $\lambda = 1$ es, en efecto, un valor propio. Esto significa que esta transformación lleva determinados vectores en sí mismos (los deja invariantes). El rango de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ es 2. En consecuencia, la dimensión del subespacio invariante asociado a este autovalor es 1. Obtengamos una base:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resulta un sistema de dos ecuaciones (la tercera no proporciona información adicional):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Geométricamente, el sistema de ecuaciones se interpreta como la intersección de dos planos, lo que genera una recta. Un vector director de la misma es el $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$.

Para $\lambda = -1$, resulta:

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4/5 & 8/5 \end{pmatrix}$$

Pero como $\mathrm{Det}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) \neq 0$, $\lambda = -1$ no es un valor propio de $\mathbf{A}$. La isometría no invierte ningún vector.

En definitiva, el único subespacio invariante bajo nuestro endomorfismo es $\mathrm{lin}(1, 1, 2)$ (también se puede escribir $\mathrm{span}(1, 1, 2)$).

c) El determinante de la isometría proporciona información sobre su comportamiento geométrico. Si el determinante es 1, la isometría se dice *directa* (se trata de un giro o de una simetría) y si es -1, hablamos de una isometría *indirecta* (podría darse composición de un giro y una simetría). En nuestro caso, por fortuna:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{vmatrix} = 1$$

Detengámonos a reflexionar sobre el hecho de que la recta $\mathrm{lin}(1, 1, 2)$ sea el único subespacio de vectores invariantes. Es claro que $\mathbf{A}$ no es una simetría. De ser así, habríamos encontrado un subespacio de vectores que sufren inversión al hacerles la imagen, i.e. $\lambda = -1$ sería un autovalor del endomorfismo. La única posibilidad que resta es que $\mathbf{A}$ sea un giro. En tal caso, el eje de giro sería la recta invariante hallada.

Estudiemos qué le sucede a aquellos vectores que se encuentran en el ortogonal de $\mathrm{lin}(1, 1, 2)$, que, evidentemente, es el plano que corta perpendicularmente a esta recta. Su ecuación implícita es $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

Consideramos, por ejemplo, el vector $\mathbf{x} = (1, 1, -1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

¿Qué ángulo forman los vectores de entrada y de salida? Calculémoslo:

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = -\frac{1}{5}$$

Concluimos que $\mathbf{A}$ representa un giro respecto de la recta $\mathrm{lin}(1, 1, 2)$ de un ángulo θ tal que $\cos\theta = -1/5$.

Obsérvese que este coseno coincide con:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}[\mathrm{tr}(\mathbf{A}) - 1]$$

Donde $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ es la traza de $\mathbf{A}$ (suma de los elementos de la diagonal principal).

MARTÍN DE LA ROSA DÍAZ
MAYO **2015** – FEBRERO **2016** (versión revisada)