A continuación, se repasarán y motivarán algunas ideas ya tratadas en lecciones anteriores. Sin duda, el concepto central hasta el momento ha sido el de *producto escalar*. Es bien conocido el producto escalar *usual* (llamado simplemente producto escalar en los estudios preuniversitarios). Consideremos el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, donde $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual: si $x = (x^1, x^2), y = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\langle x, y \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2.$$

Puede comprobarse que el producto escalar usual satisface las propiedades de un producto escalar euclídeo. Los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ cumplen $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$, y decimos que son *ortogonales*. Esto es consistente con la intuición que habíamos adquirido en el instituto: gráficamente, los vectores e_1 y e_2 forman 90 grados, son perpendiculares, por lo que su producto escalar es nulo. ¿Pero por qué se habla de ortogonalidad y no de perpendicularidad? Para verlo, dotemos a $\mathbb{R}^2$ de otro producto escalar euclídeo, como puede ser el dado por

$$[x, y] = 2x^1 y^1 + 2x^2 y^2 + x^1 y^2 + x^2 y^1,$$

que también satisface las propiedades requeridas. Sin embargo, es $[e_1, e_2] = 1 \neq 0$. Con respecto a este segundo producto escalar, e_1 y e_2 no son ortogonales. Así, resulta que la idea de ortogonalidad es una abstracción de la noción clásica de perpendicularidad: mientras que la segunda significa que gráficamente los vectores forman un ángulo recto, para hablar de ortogonalidad hay que indicar con respecto a qué producto escalar se refiere, correspondiéndose la perpendicularidad clásica con la ortogonalidad respecto al producto escalar usual. También podemos determinar el ángulo que forman e_1 y e_2 con respecto al producto escalar euclídeo $[\cdot\,, \cdot]$

$$\cos\theta = \frac{[e_1, e_2]}{\sqrt{[e_1, e_1]}\sqrt{[e_2, e_2]}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

Así, $\theta \neq \pi/2$. Los conceptos de ángulo, longitud, etc. están supeditados al producto escalar con el que se equipa el espacio vectorial. ¡No se puede hablar de longitudes, ángulos, ortogonalidad, etc. si el espacio vectorial no está dotado de un producto escalar!

Hasta aquí, la gracia de contemplar productos escalares euclídeos distintos del usual puede parecer poca. Pero el siguiente ejemplo pondrá de manifiesto el gran alcance que acarrea dicha generalización. Sea $\mathscr{C}([-1, 1])$ el espacio vectorial de las funciones continuas

$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Este espacio vectorial es *de dimensión infinita* y la visualización geométrica de sus elementos como flechitas en un espacio tipo $\mathbb{R}^2$ deja de ser posible. ¿Cómo podemos entonces hablar de longitudes o ángulos en este contexto? Ciertamente no desde el punto de vista geométrico de toda la vida. Ahora bien, si adoptamos un producto escalar euclídeo sobre $\mathscr{C}([-1, 1])$, como

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx, \tag{1}$$

donde $f, g \in \mathscr{C}([-1, 1])$, podemos trabajar con las abstracciones naturales de tales conceptos. Verbigracia, sean las funciones $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ definidas sobre el intervalo $[-1, 1]$, que pertenecen a $\mathscr{C}([-1, 1])$. Dado que

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \sin x\ \cos x\ dx = 0,$$

cabría afirmar que f y g son ortogonales respecto a este producto escalar. En consecuencia, estas funciones satisfacen el teorema de Pitágoras, i.e. $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$. Y nótese que estamos hablando del teorema de Pitágoras sin que haya ningún triángulo rectángulo ni nada que se le asemeje. De este modo, la idea abstracta de producto escalar euclídeo hace posible llevar los conceptos y resultados de la geometría euclídea clásica a mundos tan extravagantes como son los espacios de funciones.

Pero no solo logramos así ampliar el dominio de aplicación de la geometría euclídea, sino que del maridaje del análisis y el álgebra lineal emergen herramientas extremadamente potentes. Por ejemplo, siendo que ahora se permite hablar de ortogonalidad entre funciones, ¿no cabría preguntarse si es factible construir una base ortonormal de algún espacio de funciones? Resulta que (extendiendo adecuadamente la definición de base para abarcar el caso infinito-dimensional de forma satisfactoria) la respuesta es afirmativa, al menos en el caso de ciertos espacios de funciones periódicas. Y cuando se toman funciones de este espacio y se escriben como combinación lineal de los elementos de esta base ortonormal, estas combinaciones lineales (que usualmente tendrán infinitos términos) no son sino las famosas *series de Fourier*, de ingente utilidad en matemáticas, física o ingeniería.

Asimismo, el análisis funcional está relacionado con el estudio de los llamados *espacios de*

Hilbert, que son la base matemática de la mecánica cuántica. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial euclídeo que satisface una condición adicional relacionada con la convergencia de sucesiones de elementos de ese espacio. Ya nos hemos encontrado con muchos espacios de Hilbert: cualquier espacio vectorial euclídeo de dimensión finita es un espacio de Hilbert. Cierto es que en mecánica cuántica se suele tomar como cuerpo sobre el que está construido el espacio vectorial el de los complejos, $\mathbb{C}$, en lugar del cuerpo de los reales. Esto obliga a modificar ligeramente la definición de producto escalar y ya no se le llama euclídeo, pero la idea es la misma. Desde el punto de vista del análisis funcional, los ejemplos más interesantes de espacios de Hilbert son espacios de funciones como el que hemos considerado en el anterior ejemplo. En mecánica cuántica se acostumbra a decir que el estado físico de un sistema viene descrito por una *función de onda*. Pues bien, dichas funciones de onda son elementos de un espacio vectorial del estilo del presentado en el anterior ejemplo. Y cuando se dice que para calcular la probabilidad de un suceso en mecánica cuántica hay que integrar el producto de la función de onda por su complejo conjugado, se está utilizando la versión compleja del producto escalar (1).

Imaginemos a continuación una coyuntura totalmente distinta. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ donde interpretamos físicamente el eje horizontal como una dimensión espacial (x) y el eje vertical como la dimensión temporal (t) en un determinado sistema de referencia. En la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0),(0,1)\}$, un vector $v \in \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas (x,t). Seguidamente, definimos una aplicación bilineal $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a través de la siguiente expresión

$$\eta((x_1,t_1),(x_2,t_2)) = -x_1x_2 + c^2t_1t_2.$$

El motivo por el que se introduce el factor c es físico: mientras que x_1 y x_2 tienen dimensiones de lontitud, t_1 y t_2 tienen dimensiones de tiempo, por lo que físicamente no tendría sentido calcular $-x_1x_2 + t_1t_2$ al no coincidir las dimensiones de los dos términos. Ahora bien, si se sustituye t_1t_2 por $c^2t_1t_2$, donde c tiene unidades de velocidad (longitud/tiempo), $-x_1x_2 + c^2t_1t_2$ es la diferencia de dos longitudes al cuadrado. Además, de esta forma la presunta norma de un vector, $\|v\| = \sqrt{\eta(v,v)}$, tiene unidades de longitud.

Ahora bien, ¿es η un producto escalar euclídeo? La respuesta es negativa, ya que a pesar de que η es simétrica, no es definida positiva (por ejemplo, $\eta((1,0),(1,0)) = -1 < 0$). Sin embargo, η es *no degenerada*, i.e. si $w \in V$ es tal que $\forall v \in V : \eta(v,w) = 0$ entonces $w = 0$. En palabras, el único vector que es ortogonal a todos los vectores del espacio vectorial es el vector nulo[1]. Puede ocurrir que el producto escalar de un vector v no nulo por sí mismo sea negativo o incluso nulo, por lo que redefiniremos $\|v\| = \sqrt{|\eta(v,v)|}$[2]. En física, a la forma bilineal η se le conoce como *métrica de Minkowski*, y el par $(\mathbb{R}^2, \eta)$ es el *espaciotiempo de Minkowski bidimensional*.

En lo sucesivo, entenderemos que los 'puntos' de $\mathbb{R}^2$ son *sucesos* caracterizados por las etiquetas x y t, mientras que un vector que conecta dos puntos se interpretará como un observador que viaja entre los dos sucesos. Por ejemplo, el vector $\overrightarrow{AB}$ que une el evento $(0,0)$ con el evento $(0,t_0)$ se corresponde con un observador que se mueve del suceso $A(x=0,t=0)$ al suceso $B(x=0,t=t_0)$. Es, por tanto, un observador en reposo con respecto al sistema de referencia elegido. El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene coordenadas $(0,t_0)$ en la base antes fijada, y su norma es $\|\overrightarrow{AB}\| = ct_0$. Si t_0 es el transcurso de tiempo experimentado por el observador, resulta que $t_0 = \|\overrightarrow{AB}\|/c$. Nótese que la escritura $(0,t_0)$ depende de cómo hayamos escogido los ejes x y t, es decir, del sistema de referencia elegido. Sin embargo, el tiempo experimentado por el observador es una magnitud física y no puede tener un valor u otro según qué sistema de referencia se tome. Por el contrario, la expresión $\|\overrightarrow{AB}\|/c$ también da el tiempo transcurrido para el observador $\overrightarrow{AB}$ y no utiliza las coordenadas x,t, por lo que vale lo mismo en *todos* los sistemas de referencia. Ello sugiere que dados dos eventos cualesquiera E_1, E_2 se defina como el *tiempo propio* medido por el observador $\overrightarrow{E_1E_2}$ como

$$\Delta\tau_{E_1\to E_2} = \frac{\|\overrightarrow{E_1E_2}\|}{c}.$$

A continuación, tomaremos dos observadores que parten de un mismo suceso, se alejan y más tarde vuelven a encontrarse, de forma que pueden comparar sus tiempos propios. El observador 1 está descrito por el vector $\overrightarrow{AB}$ considerado anteriormente. Por otra parte, el

[1] Más adelante veremos un procedimiento sistemático para demostrar que una aplicación bilineal es no degenerada.

[2] ¡Cuidado, esto NO es una norma!

observador 2 comienza en el evento $A(x = 0, t = 0)$ pero se desplaza inicialmente en el sentido positivo de las x con velocidad $v < c$ respecto del observador 1. Después, cuando alcanza el evento $C(x = vt_0/2, t = t_0/2)$, comienza a desplazarse en sentido contrario con la misma velocidad, de manera que termina coincidiendo con el observador 1 en el evento $B(x = 0, t = t_0)$. La trayectoria espaciotemporal del observador 2 está pues dada por los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$.

Si η fuese un producto escalar euclídeo, por la desigualdad triangular se tendría que $\|\overrightarrow{AB}\| < \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|$. Sin embargo, la demostración de esta propiedad necesita que η sea definida positiva. Para este caso, puede demostrarse que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$ satisfacen

$$\|\overrightarrow{AB}\| > \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\|$$

Dividiendo por c, se tiene

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{c} > \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{c} + \frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{c} \Longrightarrow \Delta\tau_{A\to B} > \Delta\tau_{A\to C} + \Delta\tau_{C\to B}.$$

Este último resultado es la celebérrima *paradoja de los gemelos*: el tiempo experimentado por el observador 2 es *menor* que el observador 1. Y si estos observadores fuesen gemelos, se daría la sorprendente situación de que al final del experimento el gemelo que se alejó y después acercó sería más joven que el que permaneció quieto.

Finalmente, vamos a calcular cuánto tiempo transcurre para el observador 2. El proceso en el que se aleja del observador 1 está modelado por el vector $\overrightarrow{AC} = (vt_0/2, t_0/2)$, y

$$\Delta\tau_{A\to C} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{-\left(\frac{vt_0}{2}\right)^2 + c^2\left(\frac{t_0}{2}\right)^2} = \frac{t_0}{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Por simería, $\Delta\tau_{A\to C} = \Delta\tau_{C\to B}$, y como $\Delta t_{A\to B} = t_0$, el transcurso de tiempo registrado por el observador 2 es

$$\Delta\tau_{A\to C} + \Delta\tau_{C\to B} = 2\Delta\tau_{A\to C} = t_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t_{A\to B}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

que es la fórmula de la *dilatación del tiempo* en relatividad especial.