1 Matriz de una aplicación bilineal

Sobre un espacio vectorial V de dimensión finita n se considera la aplicación bilineal $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, que no necesariamente es un producto escalar euclídeo. Tómese una base cualquiera $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V. Dados dos vectores $x, y \in V$ con coordenadas $x = (x^1, \ldots, x^n)_B, y = (y^1, \ldots, y^n)_B$, el producto escalar de x con y puede expresarse genéricamente como

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x^i e_i, \sum_{j=1}^n y^j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x^i y^j \langle e_i, e_j\rangle,$$

donde se ha usado que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es lineal en ambas entradas. Sea la matriz $G = (g_{ij})$, donde $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$. Más explícitamente

$$G = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \ldots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \ldots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Si además definimos las matrices columna correspondientes a los vectores x y y como

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

el producto escalar puede escribirse matricialmente como

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i,j=1}^n x^i \langle e_i, e_j\rangle y^j = X^t G Y = \begin{pmatrix} x^1 & \ldots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \ldots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \ldots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Así, conocer la aplicación bilineal $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es equivalente a conocer la matriz asociada G en alguna base.

Definición 1.1 *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, una aplicación bilineal. Dada $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V, la matriz de $\langle \cdot , \cdot \rangle$ en la base B es*

$$G = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \ldots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \ldots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix}.$$

En particular, si $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es un producto escalar euclídeo, G se conoce como matriz de Gram de $\langle \cdot , \cdot \rangle$ en la base B.

Cuando sea necesario indicar con respecto a qué base se ha construido la matriz de Gram, escribiremos G_B.

Definición 1.2 *Sean V un espacio vectorial y $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, una aplicación bilineal simétrica. Se dice que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es no degenerada si y solo si dado $v \in V$, $\langle v, x \rangle = 0$ para todo $x \in V$ implica que $v = 0$.*

Usualmente, si $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación bilineal simétrica y no degenerada, se le sigue llamando producto escalar, aunque no producto escalar euclídeo[1]. Si $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es un producto escalar en este sentido, el que sea no degenerado quiere decir que el único vector que es ortogonal a todos los vectores del espacio vectorial (incluido él mismo) es el vector nulo.

Proposición 1.1 *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, una base de V, y $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, una forma bilineal. Entonces:*

(i) *$\langle \cdot , \cdot \rangle$ es simétrica si y solo si G es una matriz simétrica.*

(ii) *Si $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es simétrica, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es no degenerada si y solo si G es una matriz regular, esto es, su determinante es distinto de cero.*

(iii) *Si $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es simétrica, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es definida positiva si y solo si G es una matriz definida positiva.*

Demostración: Ejercicio.

Ejemplos:

(i) Sea $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal, entonces la matriz de Gram en dicha base es la identidad. En

[1] La aplicación η definida en la clase anteior en el contexto de la relatividad especial es bilineal, simétrica y no degenerada. Por eso se le llama producto escalar (de Minkowski).

efecto, $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, es decir[2], $G = I_n$. Una consecuencia notable de este hecho es la siguiente: sea cual sea el producto escalar euclídeo, en una base ortonormal se comporta como el producto escalar usual, ya que dados $x, y \in V$

$$\langle x, y \rangle = X^t I_n Y = \begin{pmatrix} x^1 & \dots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n.$$

(ii) Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con la aplicación bilineal $\eta((x^1, y^1), (x^2, y^2)) = -x^1 x^2 + c^2 y^1 y^2$ y $c \in \mathbb{R}^+$. Dada la base $B = \{(1,0), (0,1)\}$, la matriz de Gram asociada es

$$G = \begin{pmatrix} \eta((1,0),(1,0)) & \eta((1,0),(0,1)) \\ \eta((0,1),(1,0)) & \eta((0,1),(0,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Siendo que G es simétrica, η es simétrica. Asimismo, $\det G = -c^2 \neq 0$, de modo que η es no degenerada. Sin embargo, a la luz del criterio de Sylvester[3], G no es una matriz definida positiva porque la entrada en la esquina superior izquierda es $-1 < 0$.

(iii) Sea $\mathbb{R}_1[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo 1 dotado del producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) \, dx$$

para dos $p, q \in \mathbb{R}_1[x]$ cualesquiera. Elegimos la base canónica $B = \{1, x\}$. Se calcula entonces que

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 dx = 1,$$

$$\langle 1, x \rangle = \langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2},$$

[2] Aquí, I_n denota la matriz identidad de orden n.

[3] El *criterio de Sylvester* proporciona un procedimiento práctico para determinar si una matriz simétrica de orden n dada es definida positiva. Para ello, se parte del elemento situado en la esquina superior izquierda y se verifica si es positivo. En caso afirmativo, se construye la submatriz 2×2 que resulta de añadir al anterior elemento sus vecinos más cercanos y se hace su determinante. Si es positivo, se repite la incorporación de los elementos más próximos para construir una submatriz 3×3 y se calcula su determinante. Iteramos hasta que la submatriz coincida ya con la matriz completa $n \times n$ y hacemos el determinante. La matriz es definida positiva si y solo si los determinantes de las submatrices $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, n \times n$ son mayores que 0.

$$\langle x, x\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

y la matriz de Gram asociada es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Conocida la matriz de Gram, podemos determinar cualquier producto escalar como un producto de matrices. Por ejemplo, sean $r(x) = 1 + x$ y $s(x) = 1 - x$. En la base canónica, son $r = (1, 1)_B$ y $s = (1, -1)_B$. Por tanto

$$\langle r, s\rangle = R^t G S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.$$

Este resultado debería coincidir con el hallado a partir de la definición del producto escalar. Veamos

$$\langle r, s\rangle = \int_0^1 (1 + x)(1 - x)\, dx = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$