1 Complemento ortogonal

Definición 1.1 *Sean $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $S \subseteq V$. El ortogonal de S se define como el subconjunto*

$$S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, s \rangle = 0, \forall s \in S\}.$$

Proposición 1.1 *Sean $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $S, T \subseteq V$ tales que $S \subset T$. Entonces, $T^{\perp} \subset S^{\perp}$.*

Demostración: Si $v \in T^{\perp}$, v es ortogonal a todos los elementos de T. Como $S \subset T$, también v es ortogonal a todos los elementos de S, y así $v \in S^{\perp}$.

□

Proposición 1.2 *Sean $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $S \subseteq V$. El ortogonal de S, $S^{\perp}$, es un subespacio vectorial. Además, $(L(S))^{\perp} = S^{\perp}$.*

Demostración: Hay que probar que la suma y el producto por escalares son operaciones cerradas en $S^{\perp}$. Para ello, sean $z_1, z_2 \in S^{\perp}$. Esto quiere decir que para cualquier $s \in S$ es $\langle s, z_1 \rangle = \langle s, z_2 \rangle = 0$. Entonces

$$\langle s, z_1 + z_2 \rangle = \langle s, z_1 \rangle + \langle s, z_2 \rangle = 0 + 0 = 0,$$

y $z_1 + z_2 \in S^{\perp}$. Análogamente, si $z \in S^{\perp}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle s, \alpha z \rangle = \alpha \langle s, z \rangle = \alpha \cdot 0 = 0,$$

y $\alpha z \in S^{\perp}$. Para la segunda afirmación, la inclusión $(L(S))^{\perp} \subset S^{\perp}$ se tiene por la Proposición 1.1, mientras que la inclusión inversa es debida a que si $z \in S^{\perp}$, z es ortogonal a cualquier elemento de S. Por la linealidad del producto escalar, z será también ortogonal a cualquier combinación lineal de elementos de S, y como $L(S)$ está formado por estas combinaciones lineales, $z \in (L(S))^{\perp}$.

□

Utilizando la segunda parte de la Proposición 1.2 con $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$, se deduce que:

Corolario 1.3 *Sean* $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo y* $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$*. Entonces*[1]

$$(L(v_1, \ldots, v_k))^\perp = \{v_1, \ldots, v_k\}^\perp = \{v \in V : \langle v, v_1 \rangle = \cdots = \langle v, v_k \rangle = 0\}.$$

Ejemplos:

(i) Sea $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es el producto escalar usual. Vamos a calcular el ortogonal del subespacio $U \equiv x - y = 0$. Para ello, observemos que un vector $u \in U$ si y solo si $u = (a, a)$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Por definición, es

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \ \forall u \in U\}.$$

Llamando $v = (x, y)$, $v \in U^\perp$ si y solo si $\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\langle (x, y), (a, a) \rangle = 0 \Longrightarrow xa + ya = 0 \Longrightarrow a(x + y) = 0.$$

Como a es arbitrario, necesariamente $x+y = 0$, y esto nos da las ecuaciones implícitas del subespacio ortogonal: $U^\perp \equiv x + y = 0$.

El resultado es consistente con nuestras expectativas, ya que geométricamente U es la recta $y = x$ mientras que $U^\perp$ es la recta $y = -x$. Son perpendiculares.

Podría haberse utilizado el Corolario 1.3 para simplificar algo la cuenta. Como el vector $(1, 1)$ satisface la ecuación $x - y = 0$, $(1, 1) \in U$. De hecho, $U = L((1, 1))$, pues U tiene dimensión 1. Bastaría entonces para encontrar $U^\perp$ buscar aquellos vectores que son ortogonales a $(1, 1)$. Así, $(x, y) \in U^\perp$ si y solo si

$$\langle (x, y), (1, 1) \rangle = 0 \Longrightarrow x + y = 0,$$

y se obtiene la misma ecuación implícita para $U^\perp$. Se recomienda hacer uso del Corolario 1.3 en el cálculo del ortogonal de cualquier subespacio de dimensión finita.

[1] Simplificaré la notación escribiendo $L(v_1, \ldots, v_k)$ en lugar de $L(\{v_1, \ldots, v_k\})$, que es lo que habría que escribir si nos ponemos finos.

(ii) Sea $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ es el producto escalar usual. Dado el vector $u = (0, 0, 1)$, vamos a calcular su ortogonal, es decir, $\{u\}^\perp$. Por definición

$$\{u\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, u \rangle = 0\}.$$

Si llamamos $v = (x, y, z)$, entonces

$$\langle v, u \rangle = \langle (x, y, z), (0, 0, 1) \rangle = z,$$

y por tanto los elementos de $\{u\}^\perp$ son los vectores (x, y, z) tales que $z = 0$. Esta es la ecuación de un subespacio de dimensión 2, es decir, de un plano en $\mathbb{R}^3$. Este resultado está de acuerdo con nuestra expectativa clásica. El vector $(0, 0, 1)$ genera el eje Z y el subespacio $z = 0$ es el plano XY.

(iii) Para un ejemplo menos intuitivo, considérese el espacio vectorial $\mathscr{C}([-1, 1])$ cuyos elementos son funciones continuas de $[-1, 1]$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un número real. Se dota a $\mathscr{C}([-1, 1])$ del producto escalar

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx. \end{aligned}$$

Entonces, dado el subespacio $U = \{f \in V : f(0) = 0\}$, resulta que $U^\perp = \{0\}$. Omitimos la prueba por requerir cierta tecnología del análisis funcional.

Proposición 1.4 *Sean $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita n y U, un subespacio vectorial de V tal que* $\dim U = k \leq n$. *Entonces,* $\dim U^\perp = n - k$.

Demostración: Si $\dim U = 0$, es decir, $U = \{0\}$, entonces $U^\perp = V$ porque todo vector es ortogonal al vector nulo, de modo que $\dim U^\perp = n$. Supongamos ahora que $\dim U \neq 0$. Tomemos una base $\{u_1, \ldots, u_k\}$ de U que ampliamos a una base $B = \{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ de V. Por el Corolario 1.3, $v \in U^\perp$ si y solo si $\langle v, u_1 \rangle = \cdots = \langle v, u_k \rangle = 0$. Si en las anteriores k igualdades remplazamos v por $\sum_{i=1}^n v^i u_i$, tenemos el sistema

$$\langle u_1, u_1 \rangle v^1 + \langle u_2, u_1 \rangle v^2 + \cdots + \langle u_n, u_1 \rangle v^n = 0,$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle v^1 + \langle u_2, u_2 \rangle v^2 + \cdots + \langle u_n, u_2 \rangle v^n = 0,$$

$$\vdots$$

$$\langle u_1, u_k\rangle v^1 + \langle u_2, u_k\rangle v^2 + \cdots + \langle u_n, u_k\rangle v^n = 0,$$

que puede entenderse como las ecuaciones implícitas del subespacio $U^\perp$. Dado que son k ecuaciones linealmente independientes (ya que los coeficientes conforman k columnas de la matriz de Gram en la base B), la dimensión de $U^\perp$ es la dimensión del espacio ambiente menos el número de ecuaciones, es decir, $\dim U^\perp = n - k$.

□

Proposición 1.5 *Sean $(V, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y U, un subespacio vectorial de V. Entonces*[2]

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Demostración: En primer lugar, veamos que $U \cap U^\perp = \{0\}$. Sea $v \in U \cap U^\perp$, entonces v pertenece tanto a U como a su ortogonal. En particular, v es ortogonal a sí mismo, es decir, $\langle v, v\rangle = 0$. Como $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ es definido positivo, ha de ser $v = 0$.

Queda comprobar que $U + U^\perp = V$. Esto se sigue directamente de la fórmula de Grassmann para la dimensión de la suma de subespacios: $\dim(U+U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp)$. Acabamos de probar que el último sumando se anula. Además, llamando $\dim V = n$ y $\dim U = k$, por la Proposición 1.4 es $\dim U^\perp = n - k$, de forma que

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp = k + (n - k) = n = \dim V.$$

Por último, si un subespacio tiene la misma dimensión que el espacio ambiente, entonces coincide con el propio espacio ambiente, así que $U + U^\perp = V$.

□

El segundo de los ejemplos anteriores a la Proposición 1.4 muestra que no se puede prescindir de la condición de que V tenga dimensión finita. Ciertamente, en este ejemplo ocurre que

[2] Recuérdese que el símbolo $\oplus$ representa la *suma directa* de subespacios vectoriales: dos subespacios U_1, U_2 de V están en suma directa si $U_1 + U_2 = V$ y $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

$U^\perp = \{0\}$ sin ser $U = V$, por lo que $V \neq U \oplus U^\perp$.

La Proposición 1.5 implica que, bajo las condiciones del enunciado, todo vector $v \in V$ se descompone de forma única como $v = u + w$, siendo $u \in U$ y $w \in U^\perp$. Ello motiva la siguiente definición:

Definición 1.2 *Sean $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y $U \subseteq V$, un subespacio vectorial. Dado un vector $v \in V$, se llama proyección ortogonal de v sobre U y se denota $\pi_U(v)$ al único vector $\pi_U(v) \in U$ que satisface $v - \pi_U(v) \in U^\perp$.*