# RELACIÓN Nº 1 DE PROBLEMAS DE ALGII - GRUPO MEDIANO 1

1. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define el siguiente producto escalar euclídeo

$$\begin{aligned}\langle\cdot\,,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (x,y) &\longmapsto \langle x,y\rangle = 2x^1y^1 + 2x^2y^2 + x^3y^3 + x^1y^2 + x^2y^1,\end{aligned}$$

   siendo $x = (x^1, x^2, x^3), y = (y^1, y^2, y^3)$. Discuta si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) $\|(1,0,1)\| = \sqrt{3}$.

   (b) Los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ son ortogonales.

   (c) Los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,0)$ forman un ángulo $\theta$ tal que $\cos\theta = 1/\sqrt{6}$.

2. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$, donde $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ es el producto escalar euclídeo usual. Sea el subespacio $U = \operatorname{lin}\{(1,1,0),(1,0,-1)\}$. Determine una base ortonormal de $U$ y amplíe esta a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación

$$\begin{aligned}\langle\cdot\,,\cdot\rangle : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (p,q) &\longmapsto \langle p,q\rangle = \int_0^1 xp(x)q(x)\;dx.\end{aligned}$$

   Demuestre que se trata de un producto escalar euclídeo.

4. Sea $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ el espacio vectorial euclídeo del ejercicio anterior. Obtenga una base ortonormal del mismo.

5. Sea $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Demuestre que $x, y \in V$ son ortogonales si y solo si $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. **(Teorema del coseno)** Sea $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Dados dos vectores $v, w \in V$, pruebe que

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \cos(\operatorname{ang}(v, w)).$$

¿Qué resultado clásico se recupera cuando $v \perp w$?

7. $(*)$ Sean $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $f, g : V \longrightarrow V$, dos aplicaciones tales que para todo $x, y \in V$ se satisface

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

Demuestre que $f$ y $g$ son lineales.