RELACIÓN Nº 1 DE PROBLEMAS DE ALGII - GRUPO MEDIANO 2

1. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define el siguiente producto escalar euclídeo

$$\begin{aligned}\langle\cdot\,,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (x,y) &\longmapsto \langle x,y\rangle = 2x^1y^1 + x^2y^2 + 2x^3y^3 + x^1y^3 + x^3y^1,\end{aligned}$$

siendo $x = (x^1,x^2,x^3), y = (y^1,y^2,y^3)$. Discuta si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) $\|(1,1,0)\| = \sqrt{3}$.

(b) Los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ son ortogonales.

(c) Los vectores $(1,-1,0)$ y $(0,0,1)$ forman un ángulo θ tal que $\cos\theta = 1/\sqrt{5}$.

2. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$, donde $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ es el producto escalar euclídeo usual. Sea el subespacio $U = \operatorname{lin}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$. Determine una base ortonormal de U y amplíe esta a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación

$$\begin{aligned}\langle\cdot\,,\cdot\rangle : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (p,q) &\longmapsto \langle p,q\rangle = \int_0^2 (2-x)p(x)q(x)\;dx.\end{aligned}$$

Demuestre que se trata de un producto escalar euclídeo.

4. Sea $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ el espacio vectorial euclídeo del ejercicio anterior. Obtenga una base ortonormal del mismo.

5. Sean $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $\{e_1,\ldots,e_n\}$, un conjunto de n vectores unitarios tales que para cualquier $x \in V$ se tiene el desarrollo

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

(a) Demuestre que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

(b) Demuestre que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de V.

6. **(Recíproco del teorema de Pitágoras)** Sea $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Sabiendo que dos vectores $v, w \in V$ verifican

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

demuestre que $v \perp w$.

7. $(*)$ Sean $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $z \in V$, un vector unitario. Se define la aplicación

$$\begin{aligned} [\cdot\,, \cdot] : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\longmapsto [x, y] = \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle. \end{aligned}$$

Demuestre que $[\cdot\,, \cdot]$ es un producto escalar euclídeo si y solo si $1 + \beta > 0$.