Relación nº 1 de problemas de ALGII - Grupo Mediano 3

1. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define el siguiente producto escalar

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y\rangle = x^1y^1 + x^2y^2 - x^3y^3. \end{aligned}$$

siendo $x = (x^1, x^2, x^3), y = (y^1, y^2, y^3)$.

   (a) Calcule $\langle (0,0,1),(0,0,1)\rangle$. A la vista del resultado, ¿es $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ un producto escalar euclídeo?

   (b) Encuentre un vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle v, v\rangle = 0$[1].

2. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot\rangle)$, donde $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ es el producto escalar euclídeo usual. Sea el subespacio $U \equiv x - y = 0$. Determine una base ortonormal de U y amplíe esta a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que 2. Se considera la aplicación

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,,\cdot\rangle : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (p, q) &\longmapsto \langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ dx. \end{aligned}$$

   Demuestre que se trata de un producto escalar euclídeo.

4. Sea $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot\,,\cdot\rangle)$ el espacio vectorial euclídeo del ejercicio anterior. Obtenga una base ortonormal del mismo.

5. Sean V un espacio vectorial y $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$, $[\cdot\,,\cdot]$, dos productos escalares euclídeos. Demuestre que los dos productos son iguales si y solo si $\langle x, x\rangle = [x, x]$ para todo $x \in V$.

[1] Los vectores que cumplen esta condición se denominan *isótropos*.

6. **(Identidad del paralelogramo)** Sea $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Dados dos vectores $v, w \in V$, pruebe que

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Si v y w son dos vectores no paralelos que generan un paralelogramo, ¿qué interpretación geométrica tiene la igualdad anterior?

7. $(*)$ Sean $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $f : V \longrightarrow V$, una aplicación tal que $f(0) = 0$ y $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in V$.

   (a) Demuestre que $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in V$.

   (b) Compruebe que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $x, y \in V$ se cumple que

   $$\|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)\|^2 = 0.$$

   Deduzca que f es lineal.