Relación nº 1 de problemas de ALGII - Grupo Mediano 4

1. Sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^6$ se define la siguiente aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,,\cdot \rangle : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) &\longmapsto \langle x,y\rangle = x^1y^1 + x^3y^3 + x^5y^5, \end{aligned}$$

siendo $x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6)$, $y = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6)$.

   (a) Determine $\langle (0,1,0,1,0,1), (0,1,0,1,0,1)\rangle$. A la vista del resultado, ¿es $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ un producto escalar euclídeo?

   (b) ¿Existe algún subespacio de $\mathbb{R}^6$ tal que la restricción de $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ a este sea un producto escalar euclídeo?

2. Se considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$, donde $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ es el producto escalar euclídeo usual. Sea el subespacio

$$U = \begin{cases} x + y = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Determine una base ortonormal de U y amplíe esta a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea $\mathscr{C}^1([0,1])$ el espacio vectorial de las funciones derivables y con derivada continua $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

   (a) Se considera la aplicación

$$\begin{aligned} [\cdot\,,\cdot] : \mathscr{C}^1([0,1]) \times \mathscr{C}^1([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (f,g) &\longmapsto [f,g] = \int_0^1 f'(x)g'(x)\; dx. \end{aligned}$$

   Demuestre que *no* se trata de un producto escalar euclídeo.

(b) Se considera la aplicación

$$\begin{aligned}\langle \cdot\,,\cdot\rangle : \mathscr{C}^1([0,1]) \times \mathscr{C}^1([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R},\\ (f,g) &\longmapsto \langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\; dx.\end{aligned}$$

Demuestre que se trata de un producto escalar euclídeo.

4. Sea $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot\,,\cdot\rangle)$ el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que 2 equipado con el producto escalar euclídeo del apartado b) del ejercicio anterior. Obtenga una base ortonormal del mismo.

5. Sea $(V, \langle \cdot\,,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Dados dos vectores no nulos $x, y \in V$, demuestre que existe un único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x - \alpha y$ es ortogonal a y.

6. Pruebe que un rectángulo es un cuadrado si y solo si sus diagonales son perpendiculares.

7. $(*)$ Sea una función continua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$.

   (a) Demuestre que
   $$\left(\int_a^b f(x)\; dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(x)^2\; dx.$$
   ¿Existen funciones f para las que se alcance la igualdad?

   (b) Demuestre que
   $$(a-b)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)\; dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\; dx\right).$$
   (Indicación: considere que la función f pertenece al espacio vectorial euclídeo $(\mathscr{C}([a,b]), \langle \cdot\,,\cdot\rangle)$ de las funciones continuas en $[a,b]$ siendo $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\; dx$ y aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz de forma conveniente.)