El Espacio Dual

Juan José Cosgaya Arrieta y Martín de la Rosa Díaz.

29 de febrero de 2020

El dual de un espacio vectorial es un concepto fundamental que quiebra la cabeza de casi todos estudiantes del grado cuando se presenta por primera vez y que, en muchos casos, continua siendo algo desconcertante durante mucho tiempo por no ser comprendido y digerido con claridad. Es por ello que se nos ocurrió redactar esta explicación del mismo, con el objetivo de clarificar la mente de cualquiera que se halle confuso. Así pues esperamos que la sucesiva exposición os resulte de utilidad. Por cierto, se ha de tener en cuenta que siempre que hablamos de espacios vectoriales en este escrito nos referimos a los finitamente generados.

1. Introducción y definición

Como ya sabemos, los espacios vectoriales pueden estar formados por conjuntos de elementos tan variados como queramos, en concreto sabemos que, por ejemplo, el conjunto de las funciones reales de variable real, $\mathscr{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, forma un espacio vectorial[1] con el cuerpo de los reales $(\mathscr{F}, \mathbb{R}, +_{\mathscr{F}}, \cdot)$. Por aclarar, la suma de dos funciones y el producto de una función por un escalar definen una nueva función que queda determinada de la siguiente manera (explicitando como actúan sobre un $x \in \mathbb{R}$);

$$(f +_{\mathscr{F}} g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x)$$

Por otro lado, ya conocemos a nuestras buenas compañeras, las aplicaciones lineales, que no son sino los morfismos entre espacios vectoriales. Es más, podemos considerar las aplicaciones lineales que van de un espacio vectorial $(V, K, +, \cdot)$ en el cuerpo (que forma un espacio vectorial consigo mismo como cuerpo).

Def. 1. Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Llamamos **formas lineales** a las aplicaciones lineales α que van de V en el cuerpo:

$$\alpha : V \longrightarrow K$$

[1] Aunque este espacio vectorial no es finitamente generado, lo importante de este ejemplo es que no es extrañe que una función pueda ser un vector, i.e. un elemento de un espacio vectorial.

Podemos definir una suma y un producto por escalares para estas aplicaciones, ambos naturales para nuestra mente, de la misma forma que lo hicimos con las funciones en el ejemplo anterior. Es decir, si α y β son formas lineales de un espacio vectorial V, su suma queda determinada por

$$(\alpha + \beta)(x) := \alpha(x) + \beta(x)$$

Y si $a \in K$ es un escalar, el producto de α con a,

$$(a \cdot \alpha)(x) = a\alpha(x)$$

Nota: Aunque utilice el mismo símbolo para denotar la suma de formas que la de escalares en el cuerpo, recordad que son operaciones diferentes. Es lo que tiene abusar de la notación que aunque no es riguroso, no sobrecarga la vista.

Con estas operaciones bien definidas, se puede comprobar fácilmente que las formas lineales de un espacio vectorial concreto, V (este está fijado) con el mismo cuerpo que el de el espacio vectorial V y con la suma y multiplicación que acabamos de definir forman un espacio vectorial. Sorpresa, a este espacio vectorial se le conoce como **espacio dual** de V.

Def. 2. Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial, llamamos **espacio dual** al espacio vectorial $(V^*, K, +, \cdot)$ conformado por el conjunto de las formas lineales de V, el cuerpo K, y la suma y multiplicación por escalar definidas tal y como se ha discutido arriba. A los elementos del espacio dual los llamamos **covectores** o **formas lineales**.

Como podéis ver, la definición de espacio dual es realmente simple, es un espacio vectorial como cualquier otro. Vamos a analizar algunos aspectos de este a continuación. Si tenemos un espacio vectorial V de dimensión n y consideramos su dual, V^* existe una relación entre la dimensión de V y la de V^* que se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Dado un espacio vectorial V y su dual V^*, se satisface la siguiente igualdad*

$$\dim(V) = \dim(V^*)$$

Demostración. Los elementos de V^* son formas lineales de V en K. Si tomamos una base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de V, dado que las formas lineales son aplicaciones lineales, queda determinada una expresión matricial de todas ellas. Habiendo tomado dicha base, podemos establecer de este modo un isomorfismo entre el espacio dual y las matrices $1 \times n$, a saber, aquel que a cada forma α le asigna la matriz $1 \times n$ formada por $(\alpha(e_1), \alpha(e_2), ..., \alpha(e_n))$.

Probar que se trata de un morfismo es trivial, por supuesto es inyectivo, pues el núcleo se reduce a la forma nula, si una forma lineal α tiene por matriz $(0, 0, ..., 0)$, entonces es la forma nula, porque $\alpha(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = 0 \ \forall x \in V$ (además, dos formas lineales que asignen los mismos elementos a los vectores de una base son la misma, ya que quedan determinadas por estos). También es sobreyectiva porque cualquier matriz $(a_1, a_2, ..., a_n)$ se corresponde con la forma lineal que asigna a e_k el valor a_k $(k = 1, 2, ..., n)$, osea que alcanzamos todos las matrices $1 \times n$ con este morfismo.

Hemos encontrado un isomorfismo entre V^* y $M_{1\times n}(K)$. Ahora bien, un isomorfismo solo puede existir entre espacios vectoriales de la misma dimensión y la dimensión de $M_{1\times n}(K)$ es n, con lo que termina la demostración. ■

2. Base dual y cambio de base

Ya que conocemos la dimensión del dual de un espacio vectorial V, podemos hablar de bases en el dual. Para motivar un poco la idea, consideremos en nuestro espacio vectorial V una forma lineal α. Dada una base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de V, α queda determinada sabiendo como aplica cada uno de los vectores de esta base, de modo que si $a_k = \alpha(e_k)$ con $k = 1, 2, ..., n$, dado $x \in V$, que tiene una expresión en coordenadas $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$[2] en la base B, podemos escribir

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Si os fijáis, esto es lo mismo que hacíamos en la demostración anterior para hallar el isomorfismo, de hecho, esta matriz $(a_1, a_2, ..., a_n)$ es la que se obtiene por medio de tal isomorfismo. Pues vista esta expresión de una forma lineal cualquiera α, parece razonable considerar aquellas formas e^k que en esta expresión (ojo, expresión ligada completamente a la base B) tienen por matrices aquellas con un 1 en la posición k-ésima y un 0 en el resto, por ejemplo la forma matricial de e^3 en la base B es $(0, , 0, 1, 0, ..., 0)$. Cada una de estas n formas, e^k asigna a cada vector x su componente k-ésima en la base B, es decir,

$$\epsilon^k(x) = x^k \tag{1}$$

Def. 3. Sean V un espacio vectorial y $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base del mismo. Sea V^* el espacio dual de V, llamamos **base dual** de B al conjunto de formas lineales $B^* = \{e^1, e^2, ..., e^n\}$ tales que e^k asigna a cada $x \in V$ su coordenada k-ésima en la base B.

La base dual de una base B también queda determinada de la siguiente forma

$$e^j(e_i) = \delta_i^j \quad i, j = 1, 2, 3, ..., n \tag{2}$$

Recordad que la delta de Kronecker toma el valor 1 si $i = j$ y toma el valor 0 en caso contrario.

Teorema 2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y consideremos V^* su dual. Si B es una base de V, la base dual de B, B^* es una base de V^**

[2]Esta notación con los índices arriba para las coordenadas de los vectores se verá útil en el futuro.

Demostración. Parece fácil ver que la base dual es, en efecto, una base de V^* teniendo en cuenta la forma matricial de cada una de las formas lineales dada la base B. De hecho, estas matrices forman una base del espacio vectorial de las matrices $M_{1\times n}(K)$, ahora bien, estas matrices son las que se obtienen al aplicar el isomorfismo sobredicho a las formas $e^1, e^2, ..., e^n$ y como los isomorfismos entre espacios vectoriales transforman bases en bases, la base dual tiene que ser una base de V^*. ■

Es ahora cuando vamos a apreciar la notación de los índices arriba y abajo, pues llega el momento de establecer ciertas relaciones para el cambio de base tanto en V como en V^*. Si bien las ecuaciones de cambio de base suelen obtenerse mediante una sucesión de sumatorios un tanto engorrosa para el que las ve por primera vez, considero que hacerlo acudiendo a la expresión matricial que vamos a tomar es en cierto modo más revelador. No obstante, el estudiante no debería obviar el otro procedimiento ya que al hacer un tratamiento similar con tensores de mayor rango la escritura matricial no es posible.

Teorema 3. *Sean V un espacio vectorial y $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ y $B' = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ dos bases de este tales que*

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a^j{}_i u_j$$

de manera que,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^2{}_1 & \dots & a^n{}_1 \\ a^1{}_2 & a^2{}_2 & \dots & a^n{}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1{}_n & a^2{}_n & \dots & a^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Sean V^* el espacio dual de V y $B^* = \{e^1, e^2, ..., e^n\}$ y $B'^* = \{u^1, u^2, ..., u^n\}$ respectivamente las bases duales de B y B'. Entonces dada una forma lineal $\omega \in V^*$, si denotamos sus coordenadas en B^* por $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ y en B'^* por $(\omega'_1, \omega'_2, ..., \omega'_n)$, se verifica que:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^2{}_1 & \dots & a^n{}_1 \\ a^1{}_2 & a^2{}_2 & \dots & a^n{}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1{}_n & a^2{}_n & \dots & a^n{}_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \tag{3}$$

y que,

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^2{}_1 & \dots & a^n{}_1 \\ a^1{}_2 & a^2{}_2 & \dots & a^n{}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1{}_n & a^2{}_n & \dots & a^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \vdots \\ \omega'_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Demostración. Para abreviar, cuando escriba B, B', B^* o B'^* me referiré a la matriz columna con los vectores de cada una de las bases, en caso de tratarse de la matriz fila lo notaría como la traspuesta de esta (B^T). De igual forma Ω y Ω' denotaran las matrices columna de las coordenadas de ω en B^* y $B^{‘*}$. La letra A representará la matriz que relaciona ambas bases, es decir,

$$B = AB'.$$

Sea $x \in V$ un vector cualquiera de coordenadas $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ en la base B. De este modo, dado que $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$, tenemos que

$$x = X^T B = X^T A B'$$

Es decir, que $x = X^T A B'$, pero $X^T A$ es una matriz $1 \times n$, luego estas deben ser las coordenadas de x en B'. Por lo tanto $X'^T = X^T A$, trasponiendo en ambos lados

$$X' = A^T X$$

estas son las ecuaciones de cambio de base que ya conocemos del estudio previo de ALGI.

Veamos ahora que las ecuaciones que relacionan B^* con B'^* son las mismas que las que relacionan X y X'. Buscamos una matriz P tal que $B'^* = PB^*$, la cual sabemos que existe pues se trata de escribir los vectores (formas lineales) de B'^* en coordenadas respecto de B^*. Si esa igualdad existe, entonces al evaluar todos los vectores de B^* y los de B'^* en cualquier $x \in V$ la igualdad debería seguir siendo cierta, pero

$$\begin{pmatrix} e^1(x) \\ e^2(x) \\ \vdots \\ e^n(x) \end{pmatrix} = X \qquad y \qquad \begin{pmatrix} u^1(x) \\ u^2(x) \\ \vdots \\ u^n(x) \end{pmatrix} = X'$$

Luego $P = A^T$ y queda demostrada la primera parte del teorema. Ahora podemos proceder como al principio, pues tenemos dos bases de un espacio vectorial V^* que están relacionadas por $B'^* = A^T B^*$, por lo tanto si $\omega \in V^*$, sus coordenadas Ω y Ω' están relacionadas por las ecuaciones de cambio de base habituales, esto es

$$\Omega = A\Omega'$$

y esto completa la prueba. ■

La ventaja de la notación de índices que se ha usado se pone de manifiesto aquí, cuando escribimos los cambios de base en sumatorios. Quedarían de la siguiente manera:

$$e_i = \sum_{j=1}^n a^j{}_i u_j \qquad x'^j = \sum_{i=1}^n a^j{}_i x^i$$

$$u^j = \sum_{i=1}^n a^j{}_i e^i \qquad \omega_i = \sum_{j=1}^n a^j{}_i \omega'_j$$

3. El dual del dual

En este último apartado vamos a hablar del dual del dual, o bidual, y es que nada nos impide elevar el nivel de abstracción y considerar formas lineales de V^*, es decir, aplicaciones lineales que toman formas lineales y las mandan a escalares. Soy consciente de que esto confunde a muchas personas, porque a primera vista puede parecer extraño considerar funciones que a su vez toman funciones, y creo que se debe a que tan solo piensan en una forma analítica de las mismas, y al tratarse de aplicaciones que toman aplicaciones para dar un número no ven la manera de expresar eso analíticamente, es decir, asocian una expresión analítica, como por ejemplo $f(x) = x^2$ al concepto de función o aplicación, ¡pero esto es un gran error! Recordad que una aplicación es una colección de pares ordenados (con alguna otra condición más). No obstante, si que es posible dar expresiones analíticas para estas formas lineales que toman formas lineales y devuelven escalares, basta con saber a qué escalar mandan los vectores de una base y podremos escribir su expresión en coordenadas en esa base, pues en esencia V^* es un espacio vectorial como cualquier otro y por tanto toda aplicación lineal tiene expresión matricial dada una base (en realidad dadas dos bases, una en el espacio de salida y otra en el de llegada).

Sea como sea, vamos a observar con detenimiento el bidual, que denotaremos por V^{**}. Por supuesto, tiene la misma dimensión que V y V^* y dada una base de V^* podemos definir su base dual en V^{**}, pero el siguiente teorema nos muestra que en realidad V^{**} no es algo nuevo, pues existe un isomorfismo natural entre V y su bidual.

Teorema 4 (de Reflexividad)**.** *Sea V un espacio vectorial y V^{**} su bidual, entonces la aplicación $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ que manda $v \longmapsto \varphi(v) := \varphi_v$, donde $\varphi_v : V^* \longrightarrow K$ manda $\omega \longmapsto \varphi_v(\omega) := \omega(v)$, es un isomorfismo.*

Este isomorfismo especial, pues dado un $v \in V$, queda completamente determinado quién es $\varphi(v)$. Sea cual sea la base que tomemos, el isomorfismo siempre manda v al mismo φ_v. De este modo podemos considerar que los vectores $v \in V$ no son sino formas lineales que toman covectores (formas lineales de V) de V^*.

Demostración. Veamos en primer lugar que φ_v es lineal para asegurar que pertenece a V^{**}, pues que es una aplicación de V^* en K es claro.

$$\varphi_v(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v) = \varphi_v(\alpha) + \varphi_v(\beta)$$

$$\varphi_v(a\alpha) = (a\alpha)(v) = a\alpha(v) = a\varphi_v(\alpha)$$

Y queda demostrado que es lineal y que por tanto $\varphi_v \in v^{**}$. Demostremos ahora que φ es un morfismo, es decir, que es una aplicación lineal entre V y V^{**}.

$$\varphi(v + w) = \varphi_{v+w}$$

Veamos como actúa sobre un covector cualquiera α

$$\varphi_{v+w}(\alpha) = \alpha(v + w) = \alpha(v) + \alpha(w) = \varphi_v(\alpha) + \varphi_w(\alpha)$$

Como esto es cierto para cualquier covector de V^*, tenemos la igualdad $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$. Con la multiplicación por un escalar es igual,

$$\varphi_{av}(\alpha) = \alpha(av) = a\alpha(v) = a\varphi_v(\alpha)$$

y tenemos que $\varphi(av) = a\varphi(v)$. Ya sabemos que se trata de un morfismo, ahora queda ver que es inyectivo y sobreyectivo pero como ya sabemos que la dimensión de V^{**} y de V es la misma, si probamos que es inyectivo tendremos demostrado que también es sobreyectivo. Para ver que es inyectivo demostremos que el núcleo de φ es el vector nulo. Supongamos que $\varphi(v)$ sea la forma nula, es decir, que para todo α de V^* tenemos

$$\varphi_v(\alpha) = \alpha(v) = 0$$

Supongamos que $v \neq 0$, entonces, dada una base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de V podemos escribir v como combinación lineal de estos vectores,

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$$

Como $v \neq 0$, alguna de estas coordenadas tiene que ser distinta de 0, por ejemplo v_k. Si tomamos ahora e^k y lo aplicamos sobre v obtenemos $\epsilon^k(v) = v^k \neq 0$, luego

$$\ker \varphi = \{0\}$$

y queda demostrado el teorema. ■