1. Tensores en un espacio vectorial

1.1. Espacio vectorial dual

Antes de enunciar la definición general de *tensor*, consideraremos algunos casos particulares que ya nos son familiares. Todas las estructuras que se tratan a continuación están edificadas sobre un espacio vectorial abstracto V de dimensión finita y sobre su espacio dual. A pesar de que el estudio de estos conceptos pertenece a la asignatura Álgebra Lineal y Geometría I, damos aquí, en afán de hacer de esta una referencia completa, las definiciones y resultados que más adelante necesitaremos en la construcción de tensores.

Definición 1.1.1 *Sea V un espacio vectorial real. El espacio vectorial dual de V es el conjunto*

$$V^* \equiv \{\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineal}\}$$

dotado de las operaciones suma $(+)$ y producto por escalar $(\cdot)$ dadas por

$$(\alpha + \beta)(v) \equiv \alpha(v) + \beta(v) \qquad \alpha, \beta \in V^*, v \in V$$

$$(\lambda\alpha)(v) \equiv \lambda\alpha(v) \qquad \alpha, \in V^*, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$$

El espacio dual se compone, por tanto, de *aplicaciones lineales* que engullen vectores y excretan números reales. Es fácil ver que la anterior estructura satisface todos los axiomas de la definición de espacio vectorial. De hecho, si $\dim V = n$, entonces $\dim V^* = n$, como probamos a continuación:

Proposición 1.1.1 *Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Existe una (y solo una) base de V^*, $B^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$, cuyos elementos verifican*

$$e^i(e_j) = \delta^i_j$$

En consecuencia, $\dim V^* = \dim V$. *B^* se llama base dual de B*

Demostración: En general, una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ queda completamente especificada cuando se da su imagen bajo los elementos de una base cualquiera de V. Así es precisamente como estamos definiendo los objetos e^i, lo que establece su existencia y unicidad.

Queda comprobar que B^* es una base. En primer lugar, veamos que es sistema de generadores. Tomamos $\alpha \in V^*$ y $v \in V$. En la base B, v se expande como

$$v = v^i e_i$$

entonces, aprovechando la linealidad de α

$$\alpha(v) = \alpha(v^i e_i) = v^i \alpha(e_i)$$

Llamando $\alpha_i \equiv \alpha(e_i)$, tenemos

$$\alpha(v) = \alpha_i v^i = \alpha_i e^i(v)$$

ya que

$$e^i(v) = e^i(v^j e_j) = v^j e^i(e_j) = v^j \delta^i_j = v^i$$

Como v, α son arbitrarios, hemos deducido que

$$\alpha = \alpha_i e^i \qquad \forall \alpha \in V^*$$

lo que certifica que B^* es un sistema de generadores de V^*. Para finalizar, B^* es un sistema libre, i.e. está formado por vectores linealmente independientes. En efecto, supongamos que

$$\beta = \lambda_i e^i = 0 \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Evaluando β en los elementos de la base B resulta $\beta(e_j) = 0 \Longrightarrow \lambda_j = 0 \; \forall j$ ■

A continuación, estudiaremos el cambio de base en el espacio dual. Recordemos que, dadas dos bases $B = \{e_i\}, \tilde{B} = \{\tilde{e}_j\}$ de V, las coordenadas de un mismo vector $x \in V$ respecto de las bases $B, \tilde{B}$ están relacionadas por medio de la *matriz de cambio de base* $\mathscr{M}(B, \tilde{B})$ como sigue

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \mathscr{M}(B, \tilde{B}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o bien, llamando a^i_j a las entradas de la matriz $\mathscr{M}(B, \tilde{B})$

$$\tilde{x}^i = a^i_j x^j$$

Se tiene el resultado:

Proposición 1.1.2 *Sean $B, \tilde{B}$ dos bases de V y $B^*, \tilde{B}^*$, las correspondientes bases duales. La relación entre las coordenadas de una forma $\alpha \in V^*$ respecto de sendas bases viene dada por*

$$\alpha_i = a^j_i \tilde{\alpha}_j$$

donde a^j_i son las entradas de $\mathscr{M}(B, \tilde{B})^t$

Demostración: Denotemos $B^* = \{e^i\}_i$, $\tilde{B}^* = \{\tilde{e}^j\}_j$. La igualdad

$$\tilde{x}^j = a^j_i x^i$$

es equivalente a (véase la demostración de la proposición anterior)

$$\tilde{e}^j(x) = a^j_i e^i(x)$$

Dado que esta relación es cierta $\forall x \in V$, se sigue la igualdad entre aplicaciones

$$\tilde{e}^j = a^j_i e^i$$

Tomamos ahora una forma $\alpha \in V^*$. Como buen objeto geométrico, ha de ser independiente de las coordenadas elegidas para expresarlo. Por tanto

$$\alpha = \alpha_i e^i = \tilde{\alpha}_j \tilde{e}^j$$

Utilizando la relación entre e^i y $\tilde{e}^j$

$$\alpha_i e^i = \tilde{\alpha}_j \tilde{e}^j = \tilde{\alpha}_j a^j_i e^i$$

luego

$$(\alpha_i - \tilde{\alpha}_j a^j_i) e^i = 0$$

Ahora bien, los n vectores e^i son linealmente independientes, con lo cual

$$\alpha_i - \tilde{\alpha}_j a^j_i = 0 \Longrightarrow \alpha_i = a^j_i \tilde{\alpha}_j$$

■

A priori, los constituyentes de V y V^* no parecen tener demasiado en común. Es cierto que los dos objetos son vectores en el sentido abstracto. Sin embargo, las formas son aplicaciones lineales y los elementos de V, no. ¿O quizá sí? Intuitivamente, es fácil ver que un vector (de V) adquiere de manera natural el carácter de aplicación lineal en presencia del espacio dual. Sean $x \in V, \alpha \in V^*$. Definimos

$$x(\alpha) \equiv \alpha(x) \in \mathbb{R}$$

Así, hemos construido una aplicación $x : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ bien definida y manifiestamente lineal, ya que, si $\alpha, \beta \in V^*,\ a, b \in \mathbb{R}$

$$x(a\alpha + b\beta) = (a\alpha + b\beta)(x) = a\alpha(x) + b\beta(x) = ax(\alpha) + bx(\beta)$$

Siendo algo más rigurosos, lo que acabamos de hacer no es sino identificar $x \in V$ con un elemento del dual del espacio dual, conocido como *espacio bidual*, $x \in V^{**}$, quien, por definición, es una aplicación lineal $x : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Esto es posible gracias a la existencia de un *isomorfismo lineal* entre V y V^{**} que, además, resulta ser *canónico* o *natural*, es decir, su construcción no requiere especificar bases y coordenadas (a diferencia del isomorfismo lineal *cartesiano* entre dos espacios vectoriales de igual dimensión). V y V^{**} son, a nivel de espacios vectoriales, estructuralmente idénticos, lo que legitima hablar indistintamente de vectores o formas lineales sobre el espacio dual.

Proposición 1.1.3 *(Teorema de reflexividad) La aplicación $\Phi : V \longrightarrow V^{**}$ dada por*

$$[\Phi(x)](\alpha) \equiv \alpha(x)$$

es un isomorfismo lineal.

Demostración:

1. *¿Φ está bien definida?* ¿Hace corresponder un elemento de V a un solo objeto del bidual? Afirmativo, pues la imagen de $\Phi(x) \in V^{**}$ sobre cualquier $\alpha \in V^*$ queda unívocamente especificada.

2. *¿Φ es lineal?* Afirmativo. Véase la discusión previa al enunciado del teorema.

3. *¿Φ es inyectiva?* Afirmativo, pues

$$\Phi(x) = 0 \iff [\Phi(x)](\alpha) = 0 \ \forall \alpha \iff \alpha(x) = 0 \ \forall \alpha \iff x = 0$$

   se sigue que $\ker \Phi = \{0\}$, lo que, para aplicaciones lineales, equivale a la inyectividad.

4. *¿Φ es sobreyectiva?* Afirmativo. Como

$$\dim V = \dim \ker \Phi + \dim \mathrm{Im} \Phi$$